JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **21**, 257–268 (1977)

Eigenschaften von schwach tschebyscheffschen Räumen

MANFRED SOMMER AND HANS STRAUSS

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Erlangen-Nürnberg, 8520 Erlangen, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by G. Meinardus

Received February 15, 1976

1. EINLEITUNG

In dieser Arbeit untersuchen wir Eigenschaften von schwach tschebyscheffschen Teilvektorräumen von $C[a, b]$, versehen mit der Supremumsnorm. Dies sind lineare Räume der Dimension n, deren Elemente höchstens $n - 1$ Vorzeichenwechsel in $[a, b]$ besitzen. Wir beweisen zunächst, daß jeder schwach tschebyscheffsche Raum der Dimension n schwach tschebyscheffsche Teilräume G_i der Dimension i mit $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$ enthält (Satz 2.6). Für den Beweis verwenden wir einen Satz von Krein (Lemma 2.4), der eine entsprechende Aussage für tschebyscheffsche Räume, die auf offenen Intervallen definiert sind, gezeigt hat. Außerdem benutzen wir ein Lemma (Lemma 2.5) von Jones–Karlovitz [3], wonach die Elemente eines beliebigen schwach tschebyscheffschen Raumes sich als gleichmäßige Grenzwerte von Elementen aus tschebyscheffschen Räumen darstellen lassen. Die Aussage von Satz 2.6 wurde von Zielke gleichzeitig und unabhängig von uns gefunden. Er beweist sie jedoch mit anderen Methoden.

Im weiteren wenden wir Satz 2.6 auf schwach tschebyscheffsche Räume G der Dimension n an, deren nicht identisch verschwindende Elemente höchstens endlich viele Nullstellen besitzen. Wir zeigen (Satz 3.3), daß es eine endliche Punktmenge $X = \{x_1, ..., x_m\} \subset [a, b]$ gibt, so daß alle Elemente von G auf $X \cap (a, b)$ verschwinden und in $[a, b] \backslash X$ höchstens $n - 1$ Nullstellen besitzen.

Schwach tschebyscheffsche Räume mit dieser Eigenschaft haben in jüngster Zeit eine gewisse Bedeutung erlangt, weil man unter bestimmten Bedingungen die Existenz von stetigen Schnitten für die metrische Projektion nachgewiesen hat (sh. Definition 4.1). Nürnberger–Sommer [6, 7] haben bewiesen, daß für schwach tschebyscheffsche n-dimensionale Räume $G \subset C[a, b]$, deren nicht identisch verschwindende Elemente höchstens n verschiedene Nullstellen in $[a, b]$ besitzen, genau ein stetiger Schnitt existiert. Um die Existenz von stetigen Schnitten nachzuweisen, ist es also sinnvoll,

ISSN 0021-9045

schwach tschebyscheffsche Räume mit dieser Eigenschaft zu untersuchen. Diese Untersuchungen ergeben sich als unmittelbare Folgerungen aus den oben angegebenen Sätzen. Wir zeigen (Satz 4.6), daß es genau die Räume sind, die nach Entfernen eines Punktes von $[a, b]$ in der verbliebenen Teilmenge tschebyscheff sind.

Außerdem berichtigen wir (Satz 4.8) in allgemeinerer Form eine Aussage von Bartelt [1], der zu beweisen versuchte, daß ein schwach tschebyscheffscher Raum G mit $1 \in G$, dessen Elemente höchstens endlich viele Nullstellen besitzen, tschebyscheff in $[a, b]$ ist und geben ein Gegenbeispiel (Beispiel 4.9) zu dieser Aussage.

Schließlich untersuchen wir schwach tschebyscheffsche Räume, die k-tschebyscheff sind. Dies sind Räume G (sh. [9, S.125]), für die die Menge der Minimallösungen bezüglich G für jedes f aus $C[a, b]$ höchstens ein k-dimensionales Polyeder bildet. Wir beweisen (Satz 4.12), daß diese Räume für $k < n$ tschebyscheff in $(a, b]$ und in $[a, b)$ sind, falls ihre nicht identisch verschwindenden Elemente höchstens endlich viele Nullstellen in $[a, b]$ besitzen.

2. Vollständige tschebyscheffsche Räume

Zunächst sei $C[a, b]$ vorgegeben. Wir benötigen folgende Festlegung.

Definition 2.1. Eine Nullstelle x_0 von f aus $C[a, b]$ heißt *einfache Nullstelle*, wenn f in x_0 das Vorzeichen wechselt, bzw. wenn $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ ist. Eine Nullstelle x_0 aus (a, b) von f aus $C[a, b]$ heißt *zweifache Nullstelle*, wenn f in x_0 das Vorzeichen nicht wechselt.

Im folgenden zählen wir einfache Nullstellen als eine Nullstelle und zweifache Nullstellen als zwei Nullstellen.

Wir untersuchen n-dimensionale Teilräume G von $C[a, b]$ mit folgenden Eigenschaften.

Definition 2.2. (a) G heißt *tschebyscheff* in $M \subset [a, b]$, falls jedes g aus G höchstens $n - 1$ Nullstellen in M besitzt.

(b) G heißt *schwach tschebyscheff*, falls jedes g aus G höchstens $n - 1$ Vorzeichenwechsel in $[a, b]$ besitzt (dh. es existieren keine $n + 1$ Punkte $a \leqslant x_0 < \cdots < x_n \leqslant b$ mit $g(x_i) \cdot g(x_{i+1}) < 0$, $i = 0, \ldots, n - 1$).

Definition 2.3. G heißt *vollständig* (*schwach*) *tschebyscheff*, falls G eine Basis $\{g_i\}_{i=1}^n$ mit der Eigenschaft besitzt: $G^r := \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$ ist (schwach) tschebyscheff für alle $r = 1, \ldots, n$.

Man nennt diese Basis (*schwache*) *Markov-Basis*.

Rutman [8] zitiert folgende Aussage von Krein.

LEMMA 2.4. *Ist M ein offenes reelles Intervall und G ein n-dimensionaler tschebyscheffscher Teilvektorraum von $C(M)$, dann ist G vollständig tschebyscheff auf M.*

Wir beweisen in dieser Arbeit zunächst eine ähnliche Aussage für schwach tschebyscheffsche Räume. Wir verwenden dazu die Transformation $T_t : G \to C[a, b]$, definiert durch

$$T_t(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\, t} \int_a^b e^{-(x-y)^2/2t^2} g(y)\, dy, \qquad g \in G.$$

Nach Jones–Karlovitz [3] gilt:

LEMMA 2.5. *Sei $\{g_i\}_{i=1}^n$ eine Basis eines schwach tschebyscheffschen Raumes G. Dann ist für alle $t > 0$ $G_t := \langle T_t(g_1),..., T_t(g_n)\rangle \subset C[a, b]$ ein tschebyscheffscher Raum. Außerdem konvergieren auf jedem Intervall $[a', b']$ mit $a < a' < b' < b$ die Funktionen $T_t(g_i)$ gleichmäßig gegen g_i für $t \to 0$, $i = 1,..., n$.*

Dieses Ergebnis führt uns zu folgender Aussage.

SATZ 2.6. *Jeder schwach tschebyscheffsche n-dimensionale Raum G ist vollständig schwach tschebyscheff.*

Beweis. Wir erweitern den Definitionsbereich von G auf $[a - \epsilon, b + \epsilon]$ $(\epsilon > 0)$ durch folgende Festlegung:

$$\tilde{G} := \Big\{ g \in C[a - \epsilon, b + \epsilon] \mid g_{|[a,b]} \in G, \bigwedge_{x \in [a-\epsilon, a]} g(x) = g(a), \\ \bigwedge_{x \in [b, b+\epsilon]} g(x) = g(b) \Big\}.$$

Dies ist nötig, weil nach Lemma 2.5 gleichmäßige Konvergenz der Funktionen von G_t gegen Funktionen von G nur auf kompakten Teilintervallen von (a, b) folgt. Wir wenden die Transformation T_t $(t > 0)$ auf $\tilde{G}$ an und erhalten die n-dimensionalen Teilräume $\tilde{G}_t$ von $C[a - \epsilon, b + \epsilon]$. Nach Lemma 2.5 ist $\tilde{G}_t$ tschebyscheff für alle $t > 0$. Nach Lemma 2.4 existiert eine Basis $\{g_{it}\}_{i=1}^n$ von $\tilde{G}_t$, die im Intervall $(a - \epsilon, b + \epsilon)$ eine Markov-Basis bildet. OBdA nehmen wir $\{g_{it}\}_{i=1}^n$ als Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts $(g, h) := \int_a^b g(x)\, h(x)\, dx$ an. Dies ist auch in $\tilde{G}$ ein Skalarprodukt. Nun folgt unter Verwendung von Lemma 2.5, daß für eine antitone Nullfolge $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ n Funktionen $\{g_i\}_{i=1}^n$ in $\tilde{G}$ mit

$$g_{it_j} \to g_i, \qquad i = 1,..., n,$$

wobei die gleichmäßige Konvergenz auf jedem kompakten Teilintervall von $(a-\epsilon, b+\epsilon)$ gilt, existieren. Aus Stetigkeitsgründen ist dann $\{g_i\}_{i=1}^n$ ein Orthonormalsystem in $\tilde{G}$ und deshalb eine Basis in $\tilde{G}$, dh. $\tilde{G} = \langle g_1, ..., g_n \rangle$. Weil für alle i die Funktionen aus $\tilde{G}_{i_j}^r := \langle g_{1i_j}, ..., g_{ri_j} \rangle$ für $1 \leqslant r \leqslant n$ höchstens $r-1$ Vorzeichenwechsel besitzen und weil sich in jedem Teilintervall $[a', b']$ von $(a-\epsilon, b+\epsilon)$ die Funktionen aus $\tilde{G}^r := \langle g_1, ..., g_r \rangle$ als gleichmäßiger Grenzwert von Funktionenfolgen aus $\{\tilde{G}_{i_j}^r\}_{j\in\mathbb{N}}$ darstellen lassen, folgt, daß jede Funktion aus $\tilde{G}^r$ höchstens $r-1$ Vorzeichenwechsel in $[a', b']$ besitzen kann.

Deshalb bilden die Funktionen $\{h_i\}_{i=1}^n$ aus G, definiert durch

$$\bigwedge_{x\in[a,b]} h_i(x) := g_i(x), \qquad i = 1, ..., n$$

eine schwache Markov-Basis von G.

3. Funktionen mit endlich vielen Nullstellen

Im folgenden wenden wir Satz 2.6 auf schwach tschebyscheffsche Teilvektorräume an, deren Elemente keine Nullstellenintervalle in $[a, b]$ besitzen.

Sei G stets ein n-dimensionaler Teilvektorraum von $C[a, b]$. Für g aus G bezeichne $Z_d(g)$ die Menge der zweifachen Nullstellen von g in $[a, b]$.

Wir benötigen folgendes Lemma.

Lemma 3.1 [3]. *G ist schwach tschebyscheff genau dann, wenn zu jeder Verteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ ein $g \in G$, $g \neq 0$, mit*

$$(-1)^{i+1} g(x) \geqslant 0, \qquad x_{i-1} < x < x_i, \; i = 1, ..., n$$

existiert.

Daraus und unter Verwendung von Satz 2.6 erhalten wir

Lemma 3.2. *Sei G schwach tschebyscheff. Jedes $g \in G$, $g \neq 0$, besitze höchstens endlich viele Nullstellen in $[a, b]$. Dann gilt: Es existiert eine Basis $\{g_i\}_{i=1}^n$ von G mit $Z_d(g_1) = Z_d(g_2) = \cdots = Z_d(g_n)$.*

Beweis. Nach Satz 2.6 existiert eine Basis $\{h_i\}_{i=1}^n$ von G, so daß der Teilvektorraum $\langle h_1, ..., h_i \rangle \subset C[a, b]$ schwach tschebyscheff mit der Dimension i für jedes $i = 1, ..., n$ ist.

Wir setzen: $g_1 := h_1$.

Unter Verwendung von Lemma 3.1 wählen wir für $i = 2, ..., n$ $g_i \in \langle h_1, ..., h_i \rangle$ so aus, daß g_i genau $i-1$ Vorzeichenwechsel in $[a, b] \setminus Z_d(g_1)$ besitzt. Dann ist $\langle g_1, ..., g_i \rangle$ ebenfalls schwach tschebyscheff mit der Dimension i für jedes $i = 1, ..., n$. Falls nun $Z_d(g_i) = \varnothing$ für $i = 1, ..., n$ ist, sind wir fertig. Sei also $\tilde{x} \in Z_d(g_{i_0})$ für ein $i_0 \in \{1, ..., n\}$.

Wir zeigen: $Z_d(g_{i_0}) \subset Z_d(g_1)$.

Seien $a < y_1 < \cdots < y_t < b$ alle verschiedenen Nullstellen von g_{i_0} in (a, b). Dann ist

$$K_{i_0} := \min_{i=0,\dots,t} \| g_{i_0} \|_{[y_i, y_{i+1}]} > 0,$$

wobei $y_0 := a$ und $y_{t+1} := b$ sei. Falls $\tilde{x} \notin Z_d(g_1)$, besitzt die Funktion

$$g_{i_0} - \epsilon \frac{K_{i_0}}{2 \| g_1 \|} g_1 , \qquad \epsilon = \pm 1$$

in einer Umgebung von $\tilde{x}$ mindestens zwei Vorzeichenwechsel und, *da* g_{i_0} genau $i_0 - 1$ Vorzeichenwechsel besitzt, weitere $i_0 - 1$ Vorzeichenwechsel in $[a, b]$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, *da* $\langle g_1 ,..., g_{i_0} \rangle$ schwach tschebyscheff mit der Dimension i_0 ist.

Deshalb gilt: $Z_d(g_i) \subset Z_d(g_1)$, $i = 2,..., n$.

Wir zeigen nun, daß $Z_d(g_{i_0}) \subset Z_d(g_{i_0+1})$ gilt. Sei $\tilde{x} \in Z_d(g_{i_0})$, aber $\tilde{x} \notin Z_d(g_{i_0+1})$. Dann ist $\tilde{x} \in Z_d(g_1)$ wegen $Z_d(g_{i_0}) \subset Z_d(g_1)$ und deshalb ist nach Konstruktion $g_{i_0+1}(\tilde{x}) \neq 0$. Dann besitzt aber die Funktion

$$g_{i_0} - \epsilon \frac{K_{i_0}}{2 \| g_{i_0+1} \|} g_{i_0+1} , \qquad \epsilon = \pm 1$$

mindestens $i_0 + 1$ Vorzeichenwechsel in $[a, b]$. Dies ist wiederum ein Widerspruch, *da* $\langle g_1 ,..., g_{i_0+1} \rangle$ schwach tschebyscheff mit der Dimension $i_0 + 1$ ist. Daraus folgt sofort: $Z_d(g_1) = Z_d(g_2) = \cdots = Z_d(g_n)$.

Wir erhalten folgenden Satz, der die schwach tschebyscheffschen Teilvektorräume von $C[a, b]$ charakterisiert, deren Elemente nur endlich viele Nullstellen zulassen.

SATZ 3.3. *Sei G schwach tschebyscheff. Jedes g aus G, $g \neq 0$, besitze höchstens endlich viele Nullstellen in $[a, b]$. Dann existiert eine endliche Punktmenge $X \subset [a, b]$, so daß jedes g aus G, $g \neq 0$, höchstens $n - 1$ Nullstellen in $[a, b] \backslash X$ besitzt, dh. G ist in $[a, b] \backslash X$ tschebyscheff.*

Für alle $x \in X \cap (a, b)$ gilt außerdem $g(x) = 0$ für alle $g \in G$.

Beweis. Nach Lemma 3.2 existiert eine Basis $\{ g_i \}_{i=1}^n$ von-G mit

$$Z_d(g_1) = Z_d(g_2) = \cdots = Z_d(g_n).$$

Wir definieren:

$Y := Z_d(g_1)$ falls $g, \tilde{g} \in G$ mit $g(a) \neq 0$ und $\tilde{g}(b) \neq 0$ existieren; (3.1a)

$Y := Z_d(g_1) \cup \{a\}$ falls $g(a) = 0$ für alle $g \in G$ gilt und ein $\tilde{g} \in G$ mit $g(b) \neq 0$ existiert; (3.1b)

$Y := Z_d(g_1) \cup \{b\}$ analog wie in (3.1b); (3.1c)

$Y := Z_d(g_1) \cup \{a, b\}$ falls $g(a) = g(b) = 0$ für alle $g \in G$ gilt. (3.1d)

Wir unterscheiden:

(1) Wir zeigen zunächst, daß in den Fällen (3.1)b–(3.1d) G in $[a, b]\backslash Y$ tschebyscheff ist Wir untersuchen nur den Fall (3.1b). Die Fälle (3.1c) und (3.1d) behandelt man analog.

Falls G in $[a, b]\backslash Y$ nicht tschebyscheff ist, existiert ein $g \in G$, $g \neq 0$, mit n verschiedenen Nullstellen in $(a, b]\backslash Z_d(g_1)$. Seien $a < y_1 < \cdots < y_t \leqslant b$ alle verschiedenen Nullstellen in $[a, b]\backslash Y$. Wir konstruieren ein $\tilde{g} \in G$, $\tilde{g} \neq 0$, welches $n - 1$ Vorzeichenwechsel und eine weitere Nullstelle in $[a, b]\backslash Y$ besitzt. Sei $\bar{z} := \max\{x \in (a, b) \mid g(x) = 0\}$. Seien $a < z_1 < \cdots < z_r \leqslant \bar{z}$ die Vorzeichenwechsel von g in $[a, b]$. Wir wählen weitere $n - r - 1$ Punkte $\bar{z} < z_{r+1} < \cdots < z_{n-1} < b$ mit $z_i \notin Y$, $i = r + 1,..., n - 1$. Nach Lemma 3.1 existiert ein $\tilde{g} \in G$, $\tilde{g} \neq 0$, mit $\epsilon(-1)^i \tilde{g}(x) \geqslant 0$, $z_{i-1} < x < z_i$, $i = 1,..., n$, $\epsilon = \pm 1$, wobei $z_0 := a$ und $z_n := b$ sei. Dabei sei ϵ so gewählt, daß $sgn(g(x)\tilde{g}(x)) \geqslant 0$ für $x \in [a, z_{r+1}]$ gilt. Nun ist $K := \min_{i=0,...,t} \| g \|_{[y_i, y_{i+1}]} > 0$, wobei $y_0 := a$ und $y_{t+1} := b$ sei. Die Funktion $g - K/(2 \| \tilde{g} \|) \tilde{g}$ ist an mindestens einer doppelten Nullstelle von g ebenfalls Null, da sonst $g - K/(2 \| \tilde{g} \|) \tilde{g}$ mindestens n Vorzeichenwechsel in $[a, b]$ besitzt. Deshalb besitzt $\tilde{g}$ $n - 1$ Vorzeichenwechsel und eine weitere Nullstelle $\tilde{x}$ in $[a, b]\backslash Y$. Da $\{\tilde{x}, z_1 ,..., z_{n-1}\} \cap Y = \varnothing$ ist, besitzt keine der Basisfunktionen g_i, $i = 1,..., n$, in einem der Punkte $\tilde{x}, z_1 ,..., z_{n-1}$ eine doppelte Nullstelle. Deshalb gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß für mindestens ein $i \in \{1,..., n\}$ die Funktion $\tilde{g} - cg_i$ n Vorzeichenwechsel in $[a, b]$ besitzt. Dies ist jedoch ein Widerspruch.

Wir setzen $X := Y$.

(2) $Y = Z_d(g_1)$.

Wie in (1) kann man zeigen, daß kein $g \in G$, $g \neq 0$, mit n verschiedenen Nullstellen in $(a, b]\backslash Y$ bzw. in $[a, b)\backslash Y$ existiert.

Falls nun ein $g \in G$, $g \neq 0$, mit $g(a) = g(b) = 0$ und weiteren $n - 2$ verschiedenen Nullstellen in $(a, b)\backslash Y$ existiert, setzen wir

$$X := Y \cup \{a\}$$

oder

$$X := Y \cup \{b\}.$$

Falls kein $g \in G$, $g \neq 0$, mit dieser Eigenschaft existiert, setzen wir $X := Y$.

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Der zweite Teil ergibt sich unmittelbar aus Lemma 3.2.

Aus diesem Satz ergeben sich einige Folgerungen, die zum Nachweis der Existenz stetiger Schnitte für die metrische Projektion von besonderer Bedeutung sind. Dies werden wir im nächsten Paragraphen zeigen.

Zunächst geben wir ein Beispiel für einen schwach tschebyscheffschen Teilvektorraum von $C[-3, 2]$ der Dimension 2, der Elemente enthält, die bis zu vier verschiedene Nullstellen besitzen.

BEISPIEL 3.4. Sei $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ mit

$$\begin{aligned} g_1(x) &:= |x+2| && -3 \leqslant x \leqslant -1 \\ &= |x| && -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ &= |x-2| && 1 \leqslant x \leqslant 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x) &:= (x+2)(-x-1) && -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ &= (x+2)(x+1) && -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ &= -x(x+1) && -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ &= x(1+\tfrac{2}{3}x) && 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{3}{2} \\ &= -12+22x-8x^2 && \tfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2. \end{aligned}$$

Es ist $Z_d(g_1) = Z_d(g_2) = \{-2, 0\}$ und $X = \{-2, 0, 2\}$. G ist deshalb tschebyscheff in $[-3, 2] \setminus \{-2, 0, 2\}$ nach Satz 3.3.

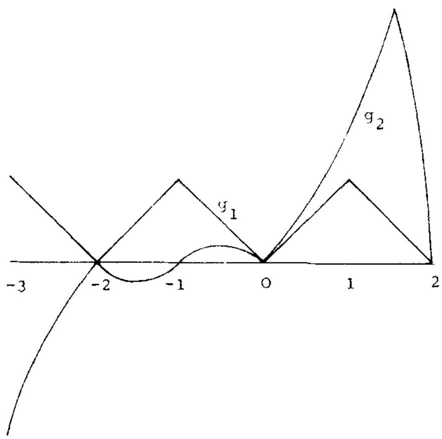

FIG. 1. Beispiel zu Satz 3.3.

4. ANWENDUNGEN AUF STETIGE SCHNITTE

DEFINITION 4.1. Für eine nichtleere Teilmenge G eines normierten Raumes E sei $P_G(f) := \{g_0 \in G \mid \|f - g_0\| = \inf\{\|f - g\| \mid g \in G\}\}$ für alle f aus E. P_G definiert eine mengenwertige Abbildung von E in 2^G, dem System aller Teilmengen von G, die man als *metrische Projektion bezüglich G* bezeichnet. Eine stetige Abbildung s von E nach G heißt *stetiger Schnitt für P_G* (im folgenden nur stetiger Schnitt genannt), falls $s(f)$ aus $P_G(f)$ für alle f aus E ist.

In jüngster Zeit wurde die Existenz von stetigen Schnitten für spezielle schwach tschebyscheffsche Teilvektorräume von $C[a, b]$ von Nürnberger–

Sommer [6, 7] nachgewiesen. Dabei wurde erkannt, daß sich in schwach tschebyscheffschen Räumen als Auswahlfunktion $s(f)$ jedes f aus $C[a, b]$ sogenannte Alternantenelemente anbieten.

DEFINITION 4.2. Für ein f aus $C[a, b]$ heißt g aus $P_G(f)$ *Alternantenelement* für f genau dann, wenn mindestens $n+1$ verschiedene Punkte $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$ mit $\epsilon(-1)^i (f-g)(x_i) = \|f-g\|$, $i = 0, \ldots, n$, $\epsilon = \pm 1$ existieren. Man nennt die Punkte $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$ *alternierende Extremalpunkte* von $f - g$.

Die endlich-dimensionalen Teilvektorräume von $C[a, b]$, die für jedes f aus $C[a, b]$ mindestens ein Alternantenelement besitzen, wurden von Jones–Karlovitz [3] charakterisiert. Es sind genau die schwach tschebyscheffschen Räume.

SATZ 4.3. *Ein n-dimensionaler Teilvektorraum G von $C[a, b]$ ist schwach tschebyscheff genau dann, wenn für jedes f aus $C[a, b]$ mindestens ein Alternantenelement aus $P_G(f)$ existiert.*

Im folgenden sei G ein n-dimensionaler schwach tschebyscheffscher Teilvektorraum von $C[a, b]$.

Nürnberger–Sommer [6] bewiesen folgenden Satz.

SATZ 4.4. *Existiert für jedes f aus $C[a, b]$ genau ein Alternantenelement g_f aus $P_G(f)$, so ist s: $C[a, b] \to G$, definiert durch $s(f) = g_f$ für alle f aus $C[a, b]$, ein stetiger Schnitt.*

Um stetige Schnitte nachzuweisen, ist es also sinnvoll, schwach tschebyscheffsche Räume zu finden, die für jedes f aus $C[a, b]$ genau ein Alternantenelement zulassen.

Nürnberger und Sommer [6] gaben folgende Charakterisierung.

SATZ 4.5. *Jedes f aus $C[a, b]$ besitzt genau ein Alternantenelement g_f aus $P_G(f)$ genau dann, wenn jedes g aus G, $g \neq 0$, höchstens n verschiedene Nullstellen in $[a, b]$ besitzt.*

Nach Satz 4.4 besitzen diese Räume also einen stetigen Schnitt. Nürnberger–Sommer zeigten sogar, daß dies der einzige stetige Schnitt ist.

Wir werden nun einige Folgerungen aus Satz 3.3 ableiten. Wir behandeln stets schwach tschebyscheffsche Räume, deren nicht verschwindende Elemente höchstens n verschiedene Nullstellen in $[a, b]$ besitzen.

Aus Satz 4.4, Satz 4.5 und der anschließenden Bemerkung folgt, daß diese Räume genau einen stetigen Schnitt zulassen.

Zuerst untersuchen wir das Aussehen dieser Räume.

SATZ 4.6. *Jedes g aus G, $g \neq 0$, besitze höchstens n verschiedene Nullstellen in $[a, b]$. Dann existiert ein x_1 aus $[a, b]$, so daß G in $[a, b]\backslash\{x_1\}$ tschebyscheff ist.*

Ist x_1 aus (a, b), so gilt $g(x_1) = 0$ für alle g aus G.

Beweis. Wir wenden Satz 3.3 an und müssen nur noch zeigen, daß wir nur einen Punkt aus $[a, b]$ wegnehmen müssen, um die Behauptung zu zeigen.

Da nach Satz 3.3 alle $g \in G$ in $X \cap (a, b)$ verschwinden, folgt, daß $X \cap (a, b)$ einelementig ist, da andernfalls unter Verwendung von Lemma 3.1 ein $g \in G$, $g \neq 0$, mit $n + 1$ verschiedenen Nullstellen in $[a, b]$ gefunden werden kann. Analog zeigt man, daß $\{a, b\} \not\subset X$ ist.

Falls $g(a) = 0$ für alle $g \in G$ ist, erfüllt $x_1 := a$ die Bedingung und falls $g(b) = 0$ für alle $g \in G$ ist, erfüllt $x_1 := b$ die Bedingung.

Ist $g(a) \neq 0$ für ein $g \in G$ und $\tilde{g}(b) \neq 0$ für ein $\tilde{g} \in G$, so folgt nach dem Beweis von Satz 3.3:

(a) $X = Z_d(g_1) \cup \{a\}$ oder $X = Z_d(g_1) \cup \{b\}$, falls ein $g \in G$, $g \neq 0$, mit $g(a) = g(b) = 0$ und mindestens $n - 2$ weiteren verschiedenen Nullstellen in $(a, b)\backslash Z_d(g_1)$ existiert. Wäre $Z_d(g_1) \neq \varnothing$, so besitzt nach Satz 3.3 die Funktion g eine weitere Nullstelle in (a, b) im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb ist G in $(a, b]$ und in $[a, b)$ tschebyscheff.

(b) $X = Z_d(g_1)$, falls kein $g \in G$, $g \neq 0$, mit $g(a) = g(b) = 0$ und mindestens $n - 2$ verschiedenen Nullstellen in $(a, b)\backslash Z_d(g_1)$ existiert. Nach Satz 3.3 ist G in $[a, b]\backslash X$ tschebyscheff. Da nach dem oben gezeigten X einelementig ist, ist auch in diesem Fall die Behauptung des Satzes bewiesen.

BEISPIEL 4.7. Sei $G := \langle x^2, x^3, \ldots, x^n \rangle \subset C[-1, 1]$. Es folgt sofort, daß jedes $g \in G$, $g \neq 0$, höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen in $[-1, 1]$ besitzt, da der Punkt 0 stets eine (im Sinne der Nullstellenzählung bei Polynomen) mindestens zweifache Nullstelle ist. Falls $g \in G$ in $[-1, 0) \cup (0, 1]$ $n - 2$ Vorzeichenwechsel hat, besitzt g im Punkt 0 keinen Vorzeichenwechsel, da andernfalls der Punkt 0 sogar eine mindestens dreifache Nullstelle wäre. Da g ein Polynom vom Grad $\leqslant n$ ist, besäße dann g in $[-1, 0) \cup (0, 1]$ höchstens $n - 3$ Nullstellen. Deshalb ist G schwach tschebyscheff mit der Dimension $n - 1$ und jedes $g \in G$, $g \neq 0$, besitzt höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen. Aus Satz 4.6 folgt, daß g in $[-1, 1]\backslash\{0\}$ tschebyscheff ist.

Die nächste Folgerung von Satz 3.3 berichtigt eine Aussage von Bartelt [1], der zu beweisen versuchte, daß jeder schwach tschebyscheffsche Raum G mit $1 \in G$ und der zusätzlichen Bedingung, daß jedes $g \in G$, $g \neq 0$, nur endlich viele Nullstellen in $[a, b]$ besitzt, in $[a, b]$ tschebyscheff ist. Dies ist nicht richtig, wie Beispiel 4.9 zeigen wird. Dagegen gilt.

SATZ 4.8. *Besitzt G eine in (a, b) (bzw. in $(a, b]$ bzw. in $[a, b)$) positive*

Funktion und hat jedes $g \in G$, $g \neq 0$, höchstens endlich viele Nullstellen in $[a, b]$, so ist G tschebyscheff in (a, b) (bzw. in $(a, b]$ bzw. in $[a, b)$).

Beweis. Wir beweisen den Satz nur für den ersten Fall. Aus Satz 3.3 folgt aber sofort, daß G in (a, b) tschebyscheff ist, denn andernfalls verschwindet jedes g an einem Punkt in (a, b). Dies ist jedoch nach Voraussetzung nicht erfüllt.

Nürnberger–Sommer [6] gaben ein Beispiel für einen schwach tschebyscheffschen Raum G der Dimension $n+1$ mit $1 \in G$, der in $[-1, 1)$ und in $(-1, 1]$ tschebyscheff, aber in $[-1, 1]$ nicht tschebyscheff ist.

BEISPIEL 4.9. *Sei n eine gerade natürliche Zahl. Sei $G := \langle 1, x \cdot (1-x^2), x^2, x^3 \cdot (1-x^2), \ldots, x^{n-2}, x^{n-1} \cdot (1-x^2), x^n \rangle \subset C[-1, 1]$. Die Dimension von G ist $n+1$.*

Jedes $g \in G$, $g \neq 0$, ist ein Polynom vom Grad $\leq n+1$ und hat deshalb in $[-1, 1]$ höchstens $n+1$ Nullstellen.

Jedes $g \in G$ läßt sich darstellen als $g = h_1 + h_2$ mit $h_1(x) = \sum_{i=0}^{n/2} a_{2i} x^{2i}$ und $h_2(x) = x(1-x^2) \cdot \sum_{i=0}^{n/2} a_{2i+1} x^{2i}$. Unter Verwendung eines Beweises von Zielke [12, S.68], kann man zeigen, daß $h_1(\tilde{x}) = -h_2(\tilde{x})$ für ein $\tilde{x} \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ist, d.h. daß eine Nullstelle von g stets in $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ liegt. Deshalb ist G in $[-1, 1)$ und in $(-1, 1]$ tschebyscheff. G ist nicht tschebyscheff in $[-1, 1]$, da man eine Funktion $g(x) = (1-x^2) \cdot x \cdot \sum_{i=0}^{n/2} a_i x^{2i-2} \in G$ finden kann, die in $[-1, 1]$ genau $n+1$ verschiedene Nullstellen besitzt.

Ein zweites Beispiel für solche Räume findet man bei Brown [2], der einen 5-dimensionalen Raum mit diesen Eigenschaften konstruiert hat.

Eine weitere Folgerung von Satz 3.3 erhalten wir für schwach tschebyscheffsche Räume, die zusätzlich k-tschebyscheff sind.

DEFINITION 4.10. Sei Q kompakt und sei G ein Teilvektorraum von $C(Q)$, versehen mit der Supremumsnorm. G heißt *k-tschebyscheff*, wenn für jedes f aus $C(Q)$ die Menge der Minimallösungen $P_G(f)$ höchstens ein k-dimensionales Polyeder bildet.

Bei Singer [9, S.126], findet man folgende Charakterisierung der k-tschebyscheffschen Räume.

SATZ 4.11. *Sei G ein Teilvektorraum von $C(Q)$. Für jedes f aus $C(Q)$ bildet $P_G(f)$ ein höchstens k-dimensionales Polyeder genau dann, wenn je $k+1$ linear unabhängige Funktionen $g_1, \ldots, g_{k+1}$ von G höchstens $n-k-1$ gemeinsame Nullstellen in Q besitzen.*

Unter Verwendung von Satz 3.3 und der Sätze 4.4 und 4.5 können wir nun auch für spezielle k-tschebyscheffsche Teilvektorräume von $C[a, b]$ die

Existenz von genau einem stetigen Schnitt nachweisen. Dies verallgemeinert ein Ergebnis von Nürnberger–Sommer [6].

SATZ 4.12. *Sei G ein n-dimensionaler schwach tschebyscheffscher und k-tschebyscheffscher Teilvektorraum von $C[a, b]$, $k \leqslant n$. Jedes $g \in G$, $g \neq 0$, besitze höchstens endlich viele Nullstellen in $[a, b]$. Dann gilt: G ist in $[a, b)$ und in $(a, b]$ tschebyscheff.*

Beweis. Da für $i < k$ jeder i-tschebyscheffsche Raum auch k-tschebyscheff ist, zeigen wir die Aussage des Satzes nur für $(n - 1)$-tschebyscheffsche Räume. Wir wenden Satz 3.3 an und erhalten eine endliche Punktmenge $X \subset [a, b]$, so daß G in $[a, b]\backslash X$ tschebyscheff ist. Wäre nun $X \cap (a, b) \neq \varnothing$, so wäre $g(x) = 0$ für alle $x \in X \cap (a, b)$. Da G $(n - 1)$-tschebyscheff ist, besitzen aber n linear unabhängige Funktionen keine gemeinsame Nullstelle. Deshalb ist $X \cap (a, b) = \varnothing$. Außerdem gibt es ein $g \in G$ mit $g(a) \neq 0$ und ein $\tilde{g} \in G$ mit $\tilde{g}(b) \neq 0$. Deshalb ist $\{a, b\} \not\subset X$. Dies bedeutet, daß G in $(a, b]$ und in $[a, b)$ tschebyscheff ist.

Beispiel 4.9 ist ein Beispiel für einen $(n + 1)$-dimensionalen schwach tschebyscheffschen und n-tschebyscheffschen Raum, der in $[-1, 1]$ nicht tschebyscheff ist.

Nach Abschluß dieser Arbeit erfuhren wir, daß Stockenberg [14] gleichzeitig und unabhängig von uns mit anderen Beweisen zu Aussagen kam, die den Aussagen der Sätze 2.6, 4.8, 4.12 im wesentlichen entsprechen.

LITERATUR

1. M. W. BARTELT, Weak Chebyshev sets and splines, *J. Approximation Theory* **14** (1975), 30–37.
2. A. L. BROWN, On continuous selections for metric projections in spaces of continuous functions, *J. Functional Analysis* **8** (1971), 431–449.
3. R. C. JONES AND L. A. KARLOVITZ, Equioscillation under nonuniqueness in the approximation of continuous functions, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 138–145.
4. S. KARLIN AND W. J. STUDDEN, "Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics," Interscience, New York, 1966.
5. A. B. NEMETH, About the extension of the domain of definition of the Chebyshev systems defined on intervals of the real axis, *Mathematica (Cluj)* **11** (1969), 307–310.
6. G. NÜRNBERGER AND M. SOMMER, Weak Chebyshev subspaces and continuous selections for the metric projection, zur Veröffentlichung eingereicht.
7. G. NÜRNBERGER AND M. SOMMER, Characterization of continuous selections of the metric projection for spline functions, zur Veröffentlichung eingereicht.
8. M. A. RUTMAN, Integral representation of functions forming a Markov-system, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **164** (1965), 989–992.
9. I. SINGER, "Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces," Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
10. I. SINGER, "The Theory of Best Approximation and Functional Analysis," SIAM, Philadelphia, 1974.

11. R. Zielke, On transforming a Tchebyshev-system into a Markov-system, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 357–366.
12. R. Zielke, Tchebyshev-systems that cannot be transformed into Markov-systems, *Manuscripta Math.* **17** (1975), 67–71.
13. R. Zielke, persönliche Mitteilung.
14. B. Stockenberg, "Zur Struktur von Čebyšev– und schwachen Čebyšev–Räumen," Inaugural-Dissertation, Duisburg, 1976.